Notations utilisées

Si m et n sont des entiers, et U et V des parties respectives de $\mathbf{R}^m$ et $\mathbf{R}^n$, on note $C(U,V)$ l'ensemble des applications continues de U dans V. $C(U) = C(U,\mathbf{R})$ est l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur U, muni de la norme $||\cdot||_\infty$ de la convergence uniforme. On note B'_∞ la boule unité de $C([0,1])$ pour cette norme.

Si A est une partie de $\mathbf{R}$, on note $\mathcal{L}\mathrm{ip}(A)$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes de A dans $\mathbf{R}$. Pour $p \in \mathbf{N}^*$, $C^p([0,1])$ désigne l'ensemble des applications $[0,1] \to \mathbf{R}$ de classe C^p, et $C^p_0([0,1])$ est le sous-espace des fonctions qui s'annulent aux points 0 et 1. Sur $C^1([0,1])$, on définit une norme $||\cdot||_{C^1}$ par :

$$||f||_{C^1} = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$$

Dans un espace vectoriel normé réel $(W, ||\cdot||_W)$, $B'_{W,||\cdot||_W}(w_0, R)$ désigne en outre, pour tout $w_0 \in W$ et tout $R \geq 0$, la boule de centre w_0 et de rayon R. Dans $\mathbf{R}^m$, $m \in \mathbf{N}^*$, muni de la norme euclidienne $||\cdot||_{\mathbf{R}^m}$, on note enfin $B_{(m)}$, $B'_{(m)}$ et $S_{(m-1)}$ la boule unité ouverte, la boule unité fermée et la sphère unité.

I Un théorème d'existence

1. (a) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. On note $\mathcal{Q}_\lambda$ l'ensemble des solutions $u \in C^2([0,1])$ de l'équation différentielle :

$$\forall x \in]0,1[, \quad -u''(x) + \lambda u(x) = 0 \tag{1}$$

Soit $u \in \mathcal{Q}_\lambda$. La restriction de u à $]0,1[$ est solution de l'équation différentielle $y'' - \lambda y = 0$. Il existe donc $(A,B) \in \mathbf{R}^2$ tel que, pour tout $x \in]0,1[$, on ait :

$$u(x) = \begin{cases} A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\sin(\sqrt{-\lambda}x) & \text{si } \lambda < 0 \\ Ax + B & \text{si } \lambda = 0 \\ A\exp(\sqrt{\lambda}x) + B\exp(-\sqrt{\lambda}x) & \text{si } \lambda > 0 \end{cases}$$

et la relation est encore vérifiée en $x = 0$ et $x = 1$ par continuité de u. Réciproquement, une fonction u de cette forme satisfait bien à l'équation différentielle, donc on a :

$$\mathcal{Q}_\lambda = \begin{cases} \{x \mapsto A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\sin(\sqrt{-\lambda}x) \ / \ (A,B) \in \mathbf{R}^2\} & \text{si } \lambda < 0 \\ \{x \mapsto Ax + B \ / \ (A,B) \in \mathbf{R}^2\} & \text{si } \lambda = 0 \\ \{x \mapsto A\exp(\sqrt{\lambda}x) + B\exp(-\sqrt{\lambda}x) \ / \ (A,B) \in \mathbf{R}^2\} & \text{si } \lambda > 0 \end{cases}$$

(b) Soit Λ l'ensemble des $\lambda \in \mathbf{R}$ tels que pour tout $g \in C([0,1])$, l'équation :

$$\forall x \in]0,1[, \quad -u''(x) + \lambda u(x) = g(x) \tag{2}$$

a une unique solution dans $C^2_0([0,1])$. Si $\lambda \in \Lambda$, alors en particulier, la seule solution de (1) qui s'annule en 0 et en 1 est la solution nulle. Réciproquement, si (1) n'a que la solution nulle, l'application linéaire $\phi : \mathcal{Q}_\lambda \to \mathbf{R}^2$, $u \mapsto (u(0), u(1))$ est injective, donc un isomorphisme puisque $\mathcal{Q}_\lambda$ est de dimension 2. Or, le théorème de Cauchy linéaire assure que (2) a au moins une solution $u_0 \in C^2([0,1])$, et l'ensemble des solutions C^2 est alors $u_0 + \mathcal{Q}_\lambda$. Il en résulte que (2) a une unique solution dans $C^2_0([0,1])$, à savoir $u_0 + \phi^{-1}(-u_0(0), -u_0(1))$.

Ainsi, Λ est l'ensemble des $\lambda \in \mathbf{R}$ pour lesquels 0 est la seule solution de (1) qui s'annule en 0 et en 1. On a donc clairement $\mathbf{R}_+ \subset \Lambda$. On considère alors $\lambda < 0$ quelconque, et l'on note $\lambda = -\omega^2$. Soit $u \in \mathcal{Q}_\lambda$ tel que $u(0) = u(1) = 0$. Si l'on écrit $u(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$, il vient $A = 0$, puis $B\sin\omega = 0$. On ne peut donc avoir $u \neq 0$ que si $\sin\omega = 0$, soit $\lambda = -k^2\pi^2$ pour un certain $k \in \mathbf{N}^*$. Et réciproquement, si $\lambda = -k^2\pi^2$, $x \mapsto \sin(k\pi x)$ est bien une solution non triviale de (1).

On a finalement montré que l'on avait $\Lambda = \mathbf{R} - \{-k^2\pi^2 \ / \ k \in \mathbf{N}^*\}$.

Pour $\lambda \in \Lambda$, on note Ψ_λ l'application (clairement linéaire) de $C([0,1])$ dans $C^2_0([0,1])$ qui à g associe l'unique solution u de (2) qui appartient à $C^2_0([0,1])$.

2. Soit $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$.
   (a) Soit $g \in B'_\infty$ quelconque, et $u = \Psi_\lambda(g)$. u étant continue, elle atteint son maximum M en un point $\tilde{x} \in [0,1]$. Montrons que $\lambda M \leq ||g||_\infty$. Si $\tilde{x} \in \{0,1\}$, $M = 0$, et c'est terminé. Sinon, $\tilde{x}$ est intérieur à $[0,1]$, et u a un maximum local en $\tilde{x}$, d'où $u''(\tilde{x})$. Comme $-u''(\tilde{x}) + \lambda u(\tilde{x}) = g(\tilde{x})$, il vient donc :

$$\lambda M = \lambda u(\tilde{x}) = u''(\tilde{x}) + g(\tilde{x}) \leq ||g||_\infty$$

   En outre, on a $M \geq u(0) = 0$, donc $0 \leq M \leq ||g||_\infty/\lambda$. De la même façon, en considérant un point de $[0,1]$ où u atteint son minimum m, il vient $-||g||_\infty/\lambda \leq m \leq 0$, donc :

$$||\Psi_\lambda(g)||_\infty = \max(M, -m) \leq \frac{||g||_\infty}{\lambda} \leq \frac{1}{\lambda}$$

   (b) Avec les mêmes notations, on a pour tout $x \in [0,1]$:

$$|u''(x)| = |\lambda u(x) - g(x)| \leq \lambda ||u||_\infty + ||g||_\infty \leq 2$$

   donc $||\Psi_\lambda(g)''||_\infty \leq 2$. Par ailleurs, comme $u(0) = u(1) = 0$, le théorème de Rolle assure qu'il existe $y \in]0,1[$ tel que $u'(y) = 0$. On a alors :

$$|u'(x)| = \Big| \int_y^x u''(t)dt \Big| \leq 2|x-y| \leq 2$$

   donc $||\Psi_\lambda(g)'||_\infty \leq 2$.

   Ces majorations sont peut-être assez grossières, mais elles suffiront dans la suite.

Pour $\mu \in \mathbf{R}_+^*$, on pose $C_\mu = \{u \in C_0^1([0,1]) \ / \ ||u||_{C^1} \leq \mu\}$. En outre, pour $h \in C(\mathbf{R})$, on note Ψ_h l'application $C^1([0,1]) \to C([0,1])$ définie par $\Psi_h(u)(x) = h(u'(x))$.

3. (a) Soit $\mu \in \mathbf{R}_+^*$. L'application $C^1([0,1]) \to \mathbf{R}^2$, $u \mapsto (u(0), u(1))$ est clairement continue pour la norme $||\cdot||_{C^1}$, donc son noyau F est un sous-espace vectoriel fermé de $C^1([0,1])$. Il en résulte que $C_\mu = F \cap B'_{C^1([0,1]),||\cdot||_{C^1}}(0,\mu)$ est non vide (car contenant 0), borné (car contenu dans une boule), symétrique, convexe et fermé (comme intersection de parties symétriques, convexes et fermé).
   (b) Soit $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$ quelconque, et $h \in C(\mathbf{R})$ une fonction bornée, avec $M = ||h||_\infty$. Pour tout $u \in C^1([0,1])$, on a donc $\Phi_h(u) \in M \cdot B'_\infty$, donc par linéarité de Ψ_λ, on a d'après I.2 :

$$\begin{aligned} ||(\Psi_\lambda \circ \Phi_h)(u)||_{C^1} &= M||\Psi_\lambda(\Phi_h(u)/M)||_\infty + M||\Psi_\lambda(\Phi_h(u)/M)'||_\infty \\ ||(\Psi_\lambda \circ \Phi_h)(u)||_{C^1} &\leq M \cdot \frac{1}{\lambda} + M \cdot 2 \end{aligned}$$

   Comme en outre $(\Psi_\lambda \circ \Phi_h)(u) \in C_0^1([0,1])$, il vient $(\Psi_\lambda \circ \Phi_h)(u) \in C_\mu$ avec $\mu = (2 + 1/\lambda)M$, pour tout $u \in C^1([0,1])$. On a a fortiori $(\Psi_\lambda \circ \Phi_h)(C_\mu) \in C_\mu$.

4. (a) On suppose $h \in C(\mathbf{R})$ lipschitzienne, et $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$. Alors Φ_h est une application lipschitzienne de $(C^1([0,1]), ||\cdot||_{C^1})$ dans $(C([0,1]), ||\cdot||_\infty)$: si l'on note k le rapport de Lipschitz de h, on a pour tout $(u,v) \in C^1([0,1])^2$:

$$||\Phi_h(u) - \Phi_h(v)||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |h(u'(x)) - h(v'(x))| \leq k||(u-v)'||_\infty \leq k||u-v||_{C^1}$$

   Par ailleurs, on a vu que Ψ_λ, considérée comme application linéaire $(C([0,1]), ||\cdot||_\infty) \to (C^1([0,1]), ||\cdot||_{C^1})$, était continue de norme $\leq 2 + 1/\lambda$, donc lipschitzienne. $\Psi_\lambda \circ \Phi_h$ est donc une application lipschitzienne, donc continue, de $(C^1([0,1]), ||\cdot||_{C^1})$ dans lui-même.
   (b) On suppose seulement $h \in C(\mathbf{R})$. Montrons que $\Psi_\lambda \circ \Phi_h$ est encore continue.
   Soit en effet $u \in C^1([0,1])$ quelconque, et (u_n) une suite de $C^1([0,1])$ qui tend vers u au sens de la norme $||\cdot||_{C^1}$. Il s'agit de montrer que $\big(\Psi_\lambda(\Phi_h(u_n))\big)$ tend vers $\Psi_\lambda(\Phi_h(u))$. La convergence en norme $||\cdot||_{C^1}$ de (u_n) implique en particulier que (u'_n) converge

uniformément vers u', et a fortiori qu'il existe $M \geq 0$ vérifiant $||u'_n||_\infty \leq M$ pour tout n. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Comme la restriction de h au segment $[-M, M]$ est uniformément continue, il existe alors $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in [-M, M]^2$ vérifiant $|x - y| \leq \alpha$, on ait $|h(x) - h(y)| \leq \varepsilon$. En choisissant $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $||u' - u'_n||_\infty \leq \alpha$, il vient donc pour $||h \circ u' - h \circ u'_n||_\infty \leq \varepsilon$, ce qui signifie que $(\Phi_h(u_n))$ converge uniformément vers $\Phi_h(u)$. On a vu qu'en outre, Ψ_λ était une application continue de $(C([0, 1]), || \cdot ||_\infty)$ dans $(C^1([0, 1]), || \cdot ||_{C^1})$, donc :

$$(\Psi_\lambda \circ \Phi_h)(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\Psi_\lambda \circ \Phi_h)(u)$$

d'où le résultat.

5. Soit $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $C([0, 1])$ telle que la suite $(||q_n||_\infty)_{n\in\mathbf{N}}$ soit bornée. On fixe une énumération $N \to [0, 1] \cap \mathbf{Q}$, $n \to u_n$ des rationnels de $[0, 1]$. On construit alors par récurrence une suite $(\sigma_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'applications strictement croissantes $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ de la façon suivante. On chosit σ_0 tel que la sous-suite $(q_{\sigma_0(n)}(u_0))$ de la suite bornée $(q_n(u_0))$ converge. Étant alors supposées construites $\sigma_0, \ldots, \sigma_k$, on choisit σ_{k+1} telle que la suite $(q_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_{k+1}(n)}(u_{k+1}))$ extraite de la suite bornée $(q_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_k(n)}(u_{k+1}))$ soit convergente. On définit alors une application $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sigma(n) = (\sigma_0 \circ \cdots \circ \sigma_n)(n)$$

Alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, la suite $(q_{\sigma(n)}(u_k))$ coïncide à partir du rang k avec une suite extraite de la suite convergente $(q_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_k(n)}(u_k))$, donc elle est elle-même convergent. On a ainsi construit une extraction σ telle que pour tout $x \in [0, 1] \cap \mathbf{Q}$, $(q_{\sigma(n)}(x))$ converge.

6. (a) Considérons la fonction $f : [0, 1] \cap \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x < 1/\sqrt{2}$ et $f(x) = 1$ sinon. Comme $[0, \sqrt{2}[\cap\mathbf{Q}$ et son complémentaire sont ouverts dans $[0, 1] \cap \mathbf{Q}$, la fonction f est continue, et elle n'a à l'évidence aucun prolongement continu au segment $[0, 1]$ tout entier, puisqu'un prolongement de f à $[0, 1]$ est nécessairement discontinu au point $1/\sqrt{2}$. Il en résulte que l'on ne peut pas toujours prolonger dans $C([0, 1])$ les fonctions de $C([0, 1] \cap \mathbf{Q})$.

   (b) Le théorème de prolongement des applications uniformément continues assure que toute fonction $f \in \mathcal{L}\mathrm{ip}([0, 1] \cap \mathbf{Q})$ admet un prolongement $\tilde{f}$ (uniformément) continu à $[0, 1]$. Montrons que l'on a en fait $\tilde{f} \in \mathcal{L}\mathrm{ip}([0, 1])$. En effet, soit $(x, y) \in [0, 1]^2$ quelconque, et (x_n), (y_n) des suites de $[0, 1] \cap \mathbf{Q}$ convergeant vers x et y respectivement. Si l'on note k le rapport de Lipschitz de f, il vient :

$$|f(x) - f(y)| = \lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| \leq \lim_{n\to\infty} k|x_n - y_n| = k|x - y|$$

   Toute fonction de $\mathcal{L}\mathrm{ip}([0, 1] \cap \mathbf{Q})$ se prolonge donc en une fonction de $\mathcal{L}\mathrm{ip}([0, 1])$ de même rapport de Lipschitz.

7. D'après le théorème de Riesz, la boule unité B'_∞ de l'espace vectoriel normé de dimension infinie $C([0, 1])$ n'est pas compacte, donc on ne peut pas toujours extraire d'une suite (r_n) de B'_∞ une suite convergente. On peut facilement exhiber un contre-exemple, en prenant pour r_n, $n \geq 1$, la fonction affine par morceaux nulle sur $[0, 1/2 - 1/2^n]$, valant 1 sur $[1/2 + 1/2^n, 1]$, et affine sur $[1/2 - 1/2^n, 1/2 + 1/2^n]$. On a bien $r_n \in B'_\infty$ pour tout n, et la suite r_n converge simplement vers une fonction nulle sur $[0, 1/2[$ et valant 1 sur $]1/2, 1]$, donc aucune suite extraite de (r_n) ne converge vers une fonction de $C([0, 1])$.

8. (a) Soit $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $C^1([0, 1])$ telle que $(||s_n||_{C^1})_{n\in\mathbf{N}}$ soit bornée (on en note M un majorant). Alors en particulier, $(||s_n||_\infty)$ est bornée, donc d'après I.5, il existe $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante telle que pour tout $x \in [0, 1] \cap \mathbf{Q}$, $(s_{\sigma(n)}(x))$ converge. On note $s(x)$ sa limite. Pour tout $(x, y) \in ([0, 1] \cap \mathbf{Q})^2$, on a alors, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|s(x) - s(y)| = \lim_{n\to\infty} |s_{\sigma(n)}(x) - s_{\sigma(n)}(y)| \leq \lim_{n\to\infty} ||s'_{\sigma(n)}||_\infty |x - y| \leq M|x - y|$$

donc on a $s \in \mathcal{L}\text{ip}([0,1]\cap\mathbf{Q})$, et il existe donc $\tilde{s} \in \mathcal{L}\text{ip}([0,1])$ qui prolonge s et de même rapport de Lipschitz.

Montrons que $(s_{\sigma(n)})$ converge uniformément vers $\tilde{s}$ sur $[0,1]$. En effet, pour $\varepsilon > 0$, on extrait du recouvrement ouvert $(B(r,\varepsilon/4M))_{r\in[0,1]\cap\mathbf{Q}}$ du segment $[0,1]$ un recouvrement fini $(B(r_i,\varepsilon/2M))_{1\leq i\leq p}$. Soit alors $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $|s(r_i) - s_{\sigma(n)}(r_i)| \leq \varepsilon/2$ pour $1 \leq i \leq p$, et soit $x \in [0,1]$ quelconque. Il existe i tel que $|x - r_i| < \varepsilon/4M$, , il vient, quel que soit $n \geq N$:

$$\begin{aligned}
|\tilde{s}(x) - s_{\sigma(n)}(x)| &\leq |\tilde{s}(x) - \tilde{s}(r_i)| + |\tilde{s}(r_i) - s_{\sigma(n)}(r_i)| + |s_{\sigma(n)}(r_i) - s_{\sigma(n)}(x)| \\
|\tilde{s}(x) - s_{\sigma(n)}(x)| &\leq M\cdot\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2} + M\cdot\frac{\varepsilon}{4M} \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

On a donc bien montré que de toute suite bornée de $(C^1([0,1]),||\cdot||_{C^1})$ on pouvait extraire une suite convergeant uniformément vers une fonction continue.

(b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $C^2([0,1])$ telle que $(||u_n||_\infty+||u_n'||_\infty+||u_n''||_\infty)_{n\in\mathbf{N}}$ soit bornée. Alors, en particulier, $(u_n')_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée de $(C^1([0,1]),||\cdot||_{C^1})$, donc on peut en extraire une suite $(u'_{\sigma(n)})$ qui converge uniformément. En extrait alors de la suite une suite $(u_{\sigma(n)})$ une suite $(u_{\tau(n)})$ telle que $(u_{\tau(n)}(0))$ converge. Alors $(u_{\tau(n)})$ est une suite de fonctions dérivables, qui converge au point 0, et dont la suite des dérivées converge uniformément sur $[0,1]$. Il en résulte que $(u_{\tau(n)})$ converge uniformément vers une fonction $u \in C^1([0,1])$ telle que u' soit limite uniforme de la suite $(u'_{\tau(n)})$. En particulier, on a bien :

$$||u - u_{\tau_n}||_{C^1} = ||u - u_{\tau(n)}||_\infty + ||u' - u'_{\tau(n)}||_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

On a donc bien montré que de toute suite de $C^2([0,1])$ bornée pour la norme $||u||_{C^2} = ||u||_\infty+||u'||_\infty+||u''||_\infty$ on pouvait extraire une suite convergente de $(C^1([0,1]),||\cdot||_{C^1})$.

9. Soit $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$, h une application continue et bornée de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, et $M = ||h||_\infty$. Il existe $\mu > 0$ tel que $\Psi_\lambda \circ \Phi_h$ envoie le convexe C_μ fermé, borné, symétrique et non vide de $E = (C^1([0,1]),||\cdot||_{C^1})$ sur lui-même, d'après I.3.b. On note $T : C_\mu \to C_\mu$ l'application induite. Elle est continue pour la norme $||\cdot||_{C^1}$ d'après I.4.b. Montrons en outre que l'adhérence K de $T(C_\mu)$ est un compact de E. En effet, soit (u_n) une suite quelconque de K. On choisit pour tout n, $v_n \in T(C_\mu)$ tel que $||u_n - v_n||_{C^1} \leq 1/n$. Notons pour tout n, $v_n = T(w_n)$ avec $w_n \in C_\mu$. Pour tout n, $v_n = \Psi_\lambda(h\circ w_n')$ est dans $C^2([0,1])$, et comme $||h\circ w_n'||_\infty \leq M$, on a d'après I.2 :

$$||v_n||_\infty + ||v_n'||_\infty + ||v_n''||_\infty \leq (1/\lambda + 2 + 2)M$$

La suite de terme général $||v_n||_\infty + ||v_n'||_\infty + ||v_n''||_\infty$ est donc bornée, et l'on peut donc extraire de (v_n) une suite $(v_{\sigma(n)})$ qui converge dans E (au sens de la norme $||\cdot||_{C^1}$). Soit v sa limite, qui est dans l'adhérence K de $T(C_\mu)$. On a pour tout n :

$$||v - u_{\sigma(n)}||_{C^1} \leq ||v - v_{\sigma(n)}||_{C^1} + ||v_{\sigma(n)} - u_{\sigma(n)}||_{C^1} \leq ||v - v_{\sigma(n)}||_{C^1} + 1/\sigma(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc on peut extraire de toute suite de K une sous-suite qui converge dans K. On a ainsi montré que $T(C_\mu)$ était d'adhérence compacte, ce qui permet d'appliquer le théorème de Schauder : l'application T a un point fixe u dans C_μ. Alors $u = \Psi_\lambda(h\circ u')$, ce qui signifie que u est un élément de $C_0^2([0,1])$ vérifiant :

$$\forall x \in]0,1[, \quad -u''(x) + \lambda u(x) = h(u'(x))$$

ce qui est bien le résultat d'existence recherché.

II Le théorème de Schauder

1. Soit $N \in \mathbf{N}^*$, F un espace vectoriel réel de dimension N, et $\mathcal{H}$ une partie de F symétrique, convexe, fermée, bornée et contenant au moins deux éléments.

(a) Soit G le sous-espace vectoriel de F engendré par $\mathcal{H}$. Comme $\mathcal{H}$ contient deux éléments au moins, il n'est pas réduit au singleton $\{0\}$, donc G contient la droite engendrée par un élément non nul de $\mathcal{H}$, de sorte que l'on a $\dim G \geq 1$. L'ensemble $\mathcal{H}$ est un système générateur de G, donc on peut en extraire une base de G, qui est finie de cardinal $n \geq N$. On note $(e_1, \dots, e_n)$ une telle base.

$\mathcal{H}$ est une partie symétrique, convexe, fermée et bornée de F contenue dans G, donc c'est une partie symétrique, convexe, fermée et bornée de G pour la norme induite. Montrons que son intérieur contient 0. Comme toutes les normes sur G définissent la même topologie, il suffit de montrer que $\mathcal{H}$ contient une boule ouverte de centre 0 pour la norme sup dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. Pour cela, on remarque que les vecteurs $-e_1, \dots, -e_n$ sont dans $\mathcal{H}$. Par convexité, $\mathcal{H}$ contient donc, pour tout $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$, le barycentre $x_{(\varepsilon_k)_{1\leq k\leq n}}$ des points $\varepsilon_k e_k$, $1 \leq k \leq n$:

$$x_{(\varepsilon_k)_{1\leq k\leq n}} = \frac{\varepsilon_1 e_1 + \cdots + \varepsilon_n e_n}{n} \in \mathcal{H}$$

Les $x_{(\varepsilon_k)}$ sont les sommets de l'hypercube de centre 0 et de côté $2/n$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, donc l'enveloppe convexe de ces points est exactement la boule fermée de centre 0 et de rayon $1/n$. $\mathcal{H}$ contient cette enveloppe convexe, donc on a bien montré qu'il admettait 0 pour point intérieur.

(b) Pour tout $a \in G$, on note $R_a = \{\eta \in \mathbf{R}_+^* \ / \ a/\eta \in \mathcal{H}\}$. Comme a/η tend vers 0 intérieur $\mathcal{H}$ quand η tend vers $+\infty$, R_a contient un voisinage de $+\infty$ dans $\mathbf{R}$, et est en particulier non vide. Comme de plus R_a est minoré par 0, l'application $\rho : G \to \mathbf{R}_+$, $a \mapsto \inf R_a$ est bien définie.

Remarquons que si $\eta \in R_a$, alors pour tout $\alpha \geq \eta$, la convexité de $\mathcal{H}$ impose :

$$\frac{1}{\alpha}a = \frac{\eta}{\alpha} \cdot \frac{a}{\eta} + \left(1 - \frac{\alpha}{\eta}\right) \cdot 0 \in \mathcal{H}$$

d'où $\alpha \in R_a$. Il en résulte que $R_a \supset]\rho(a), +\infty[$. En outre, R_a est l'image réciproque du fermé $\mathcal{H}$ par l'application continue $\mathbf{R}_+^* \to G$, $\eta \mapsto a/\eta$, donc c'est un fermé relatif de $\mathbf{R}_+^*$. En particulier, $R_a = [\rho(a), +\infty[$ si $\rho(a) > 0$, et $R_a = \mathbf{R}_+^*$ sinon.

$\mathcal{H}$ est borné : soit $M > 0$ tel qu'il soit contenu dans la boule de centre 0 et de rayon M. Pour tout $a \neq 0$, $2Ma/||a||$ est de norme $2M$, donc dans le complémentaire de $\mathcal{H}$. On a donc $||a||/(2M) \neq R_a$, et en particulier, $R_a \neq \mathbf{R}_+^*$, donc $\rho(a) > 0$. Comme en outre $R_0 = \mathbf{R}_+^*$ de façon immédiate, ρ ne s'annule qu'en 0.

Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ quelconque, et $a \in G$. Si a ou λ est nul, on a bien $\rho(\lambda a) = 0 = \lambda\rho(a)$. Supposons maintenant a non nul, et $\lambda > 0$. On a $\eta \in R_{\lambda a}$ si et seulement si $\lambda a/\eta \in \mathcal{H}$, soit $\eta/\lambda \in R_a$. Par conséquent, $R_{\lambda a} = \lambda R_a$, et donc $\rho(\lambda a) = \lambda\rho(a)$. Par ailleurs, comme $\mathcal{H}$ est symétrique, pour tout $\eta > 0$, $-a/\eta \in \mathcal{H}$ si et seulement si $a/\eta \in \mathcal{H}$, d'où, de la même façon, $\rho(-a) = \rho(a)$. On obtient ainsi pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ et tout $a \in G$:

$$\rho(\lambda a) = |\lambda|\rho(a)$$

Enfin, soit $(a, b) \in G^2$ quelconque. Si a ou b est nul, on a clairement $\rho(a+b) \leq \rho(a)+\rho(b)$. Sinon, on remarque que, d'après ce qui précède, $\rho(a) \in R_a$ et $\rho(b) \in R_b$. $\mathcal{H}$ contient donc $a/\rho(a)$ et $b/\rho(b)$. Par convexité de $\mathcal{H}$, il vient donc :

$$\frac{a+b}{\rho(a)+\rho(b)} = \frac{\rho(a)}{\rho(a)+\rho(b)}\frac{a}{\rho(a)} + \frac{\rho(b)}{\rho(a)+\rho(b)}\frac{b}{\rho(b)} \in \mathcal{H}$$

Il en résulte que $\rho(a) + \rho(b) \in R_{a+b}$, d'où $\rho(a + b) \leq \rho(a) + \rho(b)$.

On a finalement montré que ρ était une norme sur G. De plus, pour tout $a \in G$, on a $a \in \mathcal{H}$ si et seulement si $1 \in R_a$, ce qui est équivalent, puisque $R_a = [\rho(a), +\infty[\cap\mathbf{R}_+^*$, à $\rho(a) \leq 1$. $\mathcal{H}$ est donc la boule unité fermée de G pour la norme ρ.

(c) En notant toujours $(e_1, \dots, e_n)$ une base de G, on définit une norme $\tilde{\rho}$ sur $\mathbf{R}^n$ en posant :

$$\tilde{\rho}(x_1, \dots, x_n) = \rho(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n)$$

et $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ est alors une isométrie bijective de $\mathbf{R}^n$ muni de $\tilde{\rho}$ dans G muni de ρ. En particulier, $\tilde{\mathcal{H}} = B'_{\mathbf{R}^n, \tilde{\rho}}(0, 1)$ est homéomorphe à $\mathcal{H}$.
On considère alors par ailleurs sur $\mathbf{R}^n$ la norme euclidienne $|| \cdot ||$. Elle est équivalente à $\tilde{\rho}$, puisque l'on est en dimension finie, donc il existe $(m, M) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $m||x|| \leq \tilde{\rho}(x) \leq M||x||$. On considère alors l'application $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ définie par :

$$f(0) = 0 \quad \text{et pour tout } x \neq 0,\ f(x) = \frac{\tilde{\rho}(x)}{||x||} x$$

f est clairement continue sur $\mathbf{R}^n - \{0\}$, et pour tout $x \neq 0$, $||f(x)|| = \tilde{\rho}(x) \leq M||x||$, donc f est également continue en 0. De la même façon, on voit que $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ définie par :

$$g(0) = 0 \quad \text{et pour tout } x \neq 0,\ g(x) = \frac{||x||}{\tilde{\rho}(x)} x$$

est continue, car $||g(x)|| = ||x||^2 / \tilde{\rho}(x) \leq ||x||/m$. Comme en outre $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}$, f est un homéomorphisme. Comme $||f(x)|| = \tilde{\rho}(x)$ pour tout x, on a $f(\tilde{\mathcal{H}}) = B'_{(n)}$, donc $\tilde{\mathcal{H}}$ est homéomorphe à $B'_{(n)}$.
On a donc montré qu'il existait $P \in \{1, \dots, N\}$ tel que $\mathcal{H}$ soit homéomorphe à $B'_{(P)}$.

2. Soit $(E, || \cdot ||_E)$ un espace vectoriel normé réel, C une partie non vide, symétrique, convexe, fermée et bornée de E, et $T : C \to C$ une application continue dont l'image $T(C)$ a une adhérence K compacte dans E.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. L'ensemble des boules ouvertes de rayon $\varepsilon/2$ dont le centre est dans $T(C)$ forment un recouvrement ouvert de K, donc il y va a fortorit de même des boules ouvertes de rayon $\varepsilon/2$ dont le centre est dans C. On peut extraitre de ce recouvrement un sous-recouvrement fini $\left(B_{E, ||\cdot||_E}(e_i^\varepsilon, \varepsilon/2)\right)_{1 \leq i \leq N_\varepsilon}$. Comme chacune des boules ouvertes est contenue dans la boule fermée de même centre et de même rayon, il vient :

$$T(C) \subset K \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B'_{E, ||\cdot||_E}(e_i^\varepsilon, \varepsilon/2)$$

   (b) On définit pour $i \in \{1, 2, \dots, N_\varepsilon\}$ une application $\pi_{i,\varepsilon} : C \to \mathbf{R}$ par :

$$\pi_{i,\varepsilon}(e) = \max\left(0, \varepsilon - ||T(e) - e_i^\varepsilon||_E\right)$$

Pour tout i, $\pi_{i,\varepsilon}$ est clairement continue sur C pour la norme $|| \cdot ||_E$. Par ailleurs, pour un élément quelconque e de C, il existe d'après ce qui précède un indice $i \in \{1, \dots, N_\varepsilon\}$ tel que $T(e) \in B'_{E, ||\cdot||_E}(e_i^\varepsilon, \varepsilon/2)$, soit $||T(e) - e_i^\varepsilon||_E \leq \varepsilon/2$. On a donc, pour tout $e \in C$:

$$\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \pi_{i,\varepsilon}(e) \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

En conséquence, on définit bien une application $T_\varepsilon : C \to E$ continue pour la norme $|| \cdot ||_E$ en posant, pour tout $e \in C$:

$$T_\varepsilon(e) = \left(\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \pi_{i,\varepsilon}(e)\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \pi_{i,\varepsilon}(e) e_i^\varepsilon\right)$$

Soit $e \in C$ quelconque. On a :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \pi_{i,\varepsilon}(e)\right) ||T(e) - T_\varepsilon(e)||_E &= \left|\left|\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \pi_{i,\varepsilon}(e)(T(e) - e_i^\varepsilon)\right|\right|_E \\ \left(\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \pi_{i,\varepsilon}(e)\right) ||T(e) - T_\varepsilon(e)|| &\leq \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \pi_{i,\varepsilon}(e) ||T(e) - e_i^\varepsilon||_E \end{aligned}$$

Or, si $||T(e) - e_i^\varepsilon||_E \geq \varepsilon$, on a $\pi_{i,\varepsilon}(e) = 0$, donc dans tous les cas, on a :

$$\pi_{i,\varepsilon}(e)||T(e) - e_i^\varepsilon||_E \leq \varepsilon \pi_{i,\varepsilon}(e)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \pi_{i,\varepsilon}(e)\right) ||T(e) - T_\varepsilon(e)||_E &\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \pi_{i,\varepsilon}(e) \\ ||T(e) - T_\varepsilon(e)||_E &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Comme cette relation est vraie pour tout $e \in C$, on a donc :

$$\sup_{e \in C} ||T_\varepsilon(e) - T(e)||_E \leq \varepsilon$$

(c) On pose $E_\varepsilon = \mathbf{R}e_1^\varepsilon \oplus \cdots \oplus \mathbf{R}e_{N_\varepsilon}^\varepsilon$, et $\mathcal{H}_\varepsilon = C \cap E_\varepsilon$. Comme l'application T_ε est à valeurs dans E_ε, on a a fortiori $T(\mathcal{H}_\varepsilon) \subset E_\varepsilon$. D'autre part, pour tout élément e de C, $T_\varepsilon(e)$ est un barycentre à coefficients positifs des points $e_1^\varepsilon, \ldots, e_n^\varepsilon$ de C, donc appartient à l'enveloppe convexe de ces points, qui est contenue dans le convexe C. En particulier, $T(\mathcal{H}_\varepsilon) \subset C$, donc on a bien $T(\mathcal{H}_\varepsilon) \subset \mathcal{H}_\varepsilon$.
$\mathcal{H}_\varepsilon$ est l'intersection avec le sous-espace vectoriel E_ε du convexe C, fermé, borné et symétrique. $\mathcal{H}_\varepsilon$ est donc lui-même convexe, fermé, borné et symétrique. Il contient de plus toujours 0. Si l'on a $\mathcal{H}_\varepsilon = \{0\}$, T_ε admet $e_\varepsilon = 0$ pour point fixe. Sinon, comme $\dim E_\varepsilon = N_\varepsilon < +\infty$, il existe $P \in \{1, \ldots, N_\varepsilon\}$ tel que $\mathcal{H}_\varepsilon$ soit homéomorphe à $B'_{(P)}$. On note $\varphi : B'_{(P)} \to \mathcal{H}_\varepsilon$ un homéomorphisme. Alors $\varphi^{-1} \circ T_\varepsilon \circ \varphi$ est une application continue de $B'_{(P)}$ dans lui-même, donc d'après le théorème de Brouwer, elle admet un point fixe x, et l'on a alors :

$$T_\varepsilon(\varphi(x)) = \varphi\big((\varphi^{-1} \circ T_\varepsilon \circ \varphi)(x)\big) = \varphi(x)$$

donc $e_\varepsilon = \varphi(x)$ est point fixe de T_ε. Dans tous les cas, on a obtenu que T_ε avait un point fixe e_ε.
On pose alors pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = e_{1/n}$. La suite $(T(u_n))$ est à termes dans $T(C)$, donc dans son adhérence K qui est compacte. On peut donc en extraire une sous-suite $(T(u_{\sigma(n)}))$ qui converge dans K, donc dans C. Soit $e \in C$ sa limite. On a pour tout n :

$$\begin{aligned} ||e - u_{\sigma(n)}||_E &\leq ||e - T(u_{\sigma(n)})||_E + ||T(u_{\sigma(n)} - u_{\sigma(n)}||_E \\ ||e - u_{\sigma(n)}||_E &\leq ||e - T(u_{\sigma(n)})||_E + 1/\sigma(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

donc la suite $(u_{\sigma(n)})$ tend vers e, et par continuité, $(T(u_{\sigma(n)}))$ converge donc vers $T(e)$. On a donc $T(e) = e$, et T a donc un point fixe.

III Théorème de Brouwer

On définit, en plus des notations rappelées au début, $S^-_{(m-1)} = \{(x_1, \ldots, x_m) \in S_{(m-1)} \ / \ x_m \leq 0\}$, et $D_{(m-2)} = \{(x_1, \ldots, x_{m-1}, 0) \in S_{(m-1)}\}$.

1. Soit $P \in \mathbf{N}^*$ fixé, et φ une éventuelle fonction de $C(B'_{(P)}, B'_{(P)})$ telle que $\varphi(x) \neq x$ pour tout $x \in B'_{(P)}$.

   (a) En particulier, la fonction ξ_1 définie par $\xi_1(x) = x - \varphi(x)$ est continue sur $B'_{(P)}$ et ne prend pas la valeur 0, donc $\xi_1 \in C(B'_{(P)}, \mathbf{R}^P - \{0\})$. Soit de plus $x \in S_{(P-1)}$ quelconque. On a, d'après l'inégalité de Schwarz :

$$|\varphi(x) \cdot x| \leq ||\varphi(x)||_{\mathbf{R}^P} \cdot ||x||_{\mathbf{R}^P} = ||\varphi(x)||_{\mathbf{R}^P} \leq 1$$

donc $\xi_1(x)\cdot x = ||x||^2_{\mathbf{R}^P} - \varphi(x)\cdot x \geq 0$. De plus, si ce produit scalaire était nul, on aurait $\varphi(x)\cdot x = 1$. D'après l'inégalité écrite plus haut, on devrait donc avoir $||\varphi(x)||_{\mathbf{R}^P} = 1$, et l'inégalité de Schwarz serait une égalité, donc x et $\varphi(x)$ serait colinéaires et tous deux de norme 1, soit $\varphi(x) = -x$, puisque le cas d'égalité est exclu. Or $(-x)\cdot x = -1 \neq 1$. On a donc nécessairement $\xi_1(x)\cdot x \neq 0$, d'où :

$$\xi_1(x)\cdot x > 0$$

(b) On considère la fonction $\xi_2 : B'_{(P+1)} \to \mathbf{R}^{P+1}$ définie de la façon suivante. Pour tout $u = (x,t) \in \mathbf{R}^P \times \mathbf{R}$ tel que $u \in B'_{(P+1)}$, on pose :

$$\xi_2(u) = \begin{cases} (0,t) & \text{si } t = \pm 1 \\ \left(\sqrt{1-t^2}\,\xi_1\left(\frac{x}{\sqrt{1-t^2}}\right), t\right) & \text{si } |t| < 1 \end{cases}$$

La définition a bien un sens, car pour $|t| < 1$:

$$\left|\left|\frac{x}{\sqrt{1-t^2}}\right|\right|^2_{\mathbf{R}^{P+1}} = \frac{||x||^2_{\mathbf{R}^P}}{1-t^2} = \frac{||u||^2_{\mathbf{R}^{P+1}} - t^2}{1-t^2} \leq 1$$

Si $t \neq 0$, $\xi_2(u)$ a alors sa dernière composante non nulle, donc est non nulle, et sinon, $\xi_2(u) = (\xi_1(x), 0)$ qui est non nul aussi, puisque $\xi_1(x) \neq 0$. Ainsi, la fonction ξ_2 ainsi définie est à valeurs dans $\mathbf{R}^{P+1} - \{0\}$. Par ailleurs, on a :

$$\xi_2(u)\cdot u = \begin{cases} 0x + t^2 = 1 & \text{si } t = \pm 1 \\ \sqrt{1-t^2}\,\xi_1\left(\frac{x}{\sqrt{1-t^2}}\right)\cdot x + t^2 & \text{si } |t| < 1 \end{cases}$$

On voit donc que $\xi_2(u)\cdot u > 0$ pour tout u.
Montrons enfin que ξ_2 est continue. Elle l'est clairement, d'après l'expression correspondante, sur l'ouvert relatif $U = B'_{(P+1)} \cap \{(x,t)\ /\ |t| < 1\} = B'_{(P+1)} - \{(0,\pm 1)\}$ de $B'_{(P-1)}$. Montrons qu'elle l'est également, par exemple, au point $(0,1)$. En effet, la fonction ξ_1, continue sur le compact $B'_{(P)}$, est bornée. Soit M un majorant. On a alors, pour tout $(x,t) \in U$:

$$\begin{aligned} ||\xi_2(x,t) - \xi_2(0,1)||^2_{\mathbf{R}^{P+1}} &= (1-t^2)\left|\xi_1\left(\frac{x}{\sqrt{1-t^2}}\right)\right| + (t-1)^2 \\ ||\xi_2(x,t) - \xi_2(0,1)||^2_{\mathbf{R}^{P+1}} &\leq (1-t^2)M + (1-t)^2 \underset{\substack{t\to 1\\ |t|<1}}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

d'où il vient bien que ξ_2 est continue en $(0,1)$, et de même en $(0,-1)$. ξ_2 satisfait donc bien aux mêmes conditions que ξ_1, en dimension $P+1$.

(c) Soit $Q \in \{P, P+1\}$. Étant donnée une application $\xi \in C(B'_{(Q)}, \mathbf{R}^Q - \{0\})$ tel que $\xi(x)\cdot x > 0$ pour tout x (selon le cas, $\xi = \xi_1$ ou ξ_2), on va construire une rétraction continue ξ_3 de $B'_{(Q)}$ dans $S_{(Q-1)}$ de la façon classique. On pose pour cela, pour tout $x \in B'_{(Q)}$:

$$\xi_3(x) = x - \lambda(x)\xi(x)$$

où $\lambda(x)$ est à déterminer tel que $||\xi_3(x)||_{\mathbf{R}^Q} = 1$, et $\lambda|_{S_{(Q-1)}} = 0$. On a :

$$||\xi_3(x)||^2_{\mathbf{R}^Q} = ||x||^2_{\mathbf{R}^Q} - 2(\xi(x)\cdot x)\lambda(x) + ||\xi(x)||^2_{\mathbf{R}^Q}\lambda(x)^2$$

Par conséquent, si l'on pose, pour tout $x \in B'_{(Q)}$:

$$\lambda(x) = \frac{\xi(x)\cdot x - \sqrt{(\xi(x)\cdot x)^2 + ||\xi(x)||^2_{\mathbf{R}^Q}(1 - ||x||^2_{\mathbf{R}^Q})}}{||\xi(x)||^2_{\mathbf{R}^Q}}$$

λ est bien définie, car $\xi(x) \neq 0$ et $(\xi(x) \cdot x)^2 + ||\xi(x)||^2_{\mathbf{R}^Q}(1 - ||x||^2_{\mathbf{R}^Q}) > 0$, et l'on a $||\xi_3(x)||_{\mathbf{R}^Q} = 1$ pour tout x. De plus, on a clairement $\lambda|_{S_{(Q-1)}} = 0$, de sorte que ξ_3 est bien une fonction continue de $B'_{(Q)}$ dans $S_{(Q-1)}$, dont la restriction à $S_{(Q-1)}$ est l'identité.

2. Soit $Q \in \{P, P+1\}$ et $\xi_4 \in C(S^-_{(Q)}, \mathbf{R}^{Q+1} - \{0\})$ tel que pour tout $x \in S^-_{(Q)}$, $\xi_4(x) \cdot x = 0$, et pour tout $x \in D_{(Q-1)}$, $\xi_4(x) = (0, \cdots, 0, 1)$. On considère alors la fonction $\xi_5 : S_{(Q)} \to S_{(Q)}$ définie par :

$$\xi_5(x) = \frac{\xi_4(x)}{||\xi_4(x)||_{\mathbf{R}^{Q+1}}} \text{ si } x \in S^-_{(Q)}, \text{ e } \xi_5(x) = \frac{\xi_4(-x)}{||\xi_4(-x)||_{\mathbf{R}^{Q+1}}} \text{ sinon.}$$

Ceci définit bien ξ_5, puisque si $x \in S_{(Q)} - S^-_{(Q)}$, on a $-x \in S^-_{(Q)}$. De plus, ξ_5 est clairement continue sur les ouverts disjoints $\{(x_1, \ldots, x_{Q+1}) \in S_{(Q)} \ / \ x_{Q+1} < 0\}$ et $\{(x_1, \ldots, x_{Q+1}) \in S_{(Q)} \ / \ x_{Q+1} > 0\}$.

Montrons la continuité aux points restants, c'est-à-dire sur $D_{(Q-1)}$. Soit $x \in D_{(Q-1)}$ quelconque et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $S_{(Q)}$ qui tend vers x. On peut considérer les sous-familles $(x_n)_{n\in I}$ des points appartenant à $S^-_{(Q)}$, et $(x_n)_{n\in J}$ des points apparenant à son complémentaire. Si I est infini, on a, par continuité de ξ_4 sur $S^-_{(Q)}$:

$$\xi_5(x_n) = \frac{\xi_4(x_n)}{||\xi_4(x_n)||_{\mathbf{R}^{Q+1}}} \underset{\substack{n\to\infty \\ n\in I}}{\longrightarrow} \frac{\xi_4(x)}{||\xi_4(x)||_{\mathbf{R}^{Q+1}}} = (0, \ldots, 0, 1)$$

et de la même façon, si $J = \mathbf{N} - I$ est infini :

$$\xi_5(x_n) = \frac{\xi_4(-x_n)}{||\xi_4(-x_n)||_{\mathbf{R}^{Q+1}}} \underset{\substack{n\to\infty \\ n\in I}}{\longrightarrow} \frac{\xi_4(-x)}{||\xi_4(-x)||_{\mathbf{R}^{Q+1}}} = (0, \ldots, 0, 1)$$

car $-x \in D_{(Q-1)}$.

Enfin, soit $x \in S_{(Q)}$ quelconque. Si $x \in S^-_{(Q)}$, on a :

$$\xi_5(x) \cdot x = \frac{\xi_4(x) \cdot x}{||\xi_4(x)||_{\mathbf{R}^{Q+1}}} = 0$$

et dans le cas contraire :

$$\xi_5(x) \cdot x = -\frac{\xi_4(-x) \cdot (-x)}{||\xi_4(-x)||_{\mathbf{R}^{Q+1}}} = 0$$

Finalement, on a donc construit, pour $Q = P$ et $Q = P+1$, une application $\xi_5 \in C(S_{(Q)}, S_{(Q)})$ vérifiant $\xi_5(x) \cdot x = 0$ pour tout x, ce qui contredit le théorème de la boule chevelue quand on prend Q pair parmi P et $P+1$.

Il ne peut donc pas exister d'application $\varphi \in C(B'_{(P)}, B'_{(P)})$ sans point fixe, ce qui constitue bien le théorème de Brouwer.

IV Théorème de la boule chevelue

Soit $Q \in \mathbf{N}^*$, et $\alpha \in C(S_{(Q)}, S_{(Q)})$ une application telle que pour tout $x \in S_{(Q)}$, $\alpha(x) \cdot x = 0$, et qu'en outre, l'application $\tilde{\alpha} : \mathbf{R}^{Q+1} - \{0\} \to \mathbf{R}^{Q+1}$, $x \mapsto \alpha(x/||x||_{\mathbf{R}^{Q+1}})||x||_{\mathbf{R}^{Q+1}}$ soit de classe C^1.

Pour $t \in \mathbf{R}$ et $x \in \mathbf{R}^{Q+1} - \{0\}$, on note :

$$\beta_t(x) = \frac{x + t\tilde{\alpha}(x)}{\sqrt{1 + t^2}}$$

On notera en outre $|||\cdot|||$ la norme sur $\mathcal{L}(\mathbf{R}^{Q+1})$ subordonnée à $||\cdot||_{\mathbf{R}^{Q+1}}$.

1. Il est clair, d'après sa définition, que la fonction $\tilde{\alpha}$ est positivement homogène : pour tout $\lambda > 0$, on a

$$\tilde{\alpha}(\lambda x) = \alpha\left(\frac{\lambda x}{\lambda||x||_{\mathbf{R}^{Q+1}}}\right) \cdot \lambda||x||_{\mathbf{R}^{Q+1}} = \lambda\tilde{\alpha}(x)$$

Par conséquent, on a $\lambda\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha} \circ \lambda\,\mathrm{id}$, d'où en différentiant :

$$\lambda d\tilde{\alpha}_x = d(\lambda\tilde{\alpha})_x = d(\tilde{\alpha} \circ \lambda\,\mathrm{id})_x = d\tilde{\alpha}_{\lambda x} \circ d(\lambda\,\mathrm{id})_x = \lambda d\tilde{\alpha}_{\lambda x}$$

ce qui montre que pour tout x :

$$d\tilde{\alpha}_x = d\tilde{\alpha}_{x/||x||_{\mathbf{R}^{Q+1}}}$$

En particulier, l'ensemble des valeurs prises par l'application continue $x \mapsto d\tilde{\alpha}_x$ sont prises sur le compact $S_{(Q)}$, de sorte que cette application est bornée sur $\mathbf{R}^{Q+1} - \{0\}$. On note $M = \sup_x \|d\tilde{\alpha}_x\|$. On peut remarquer que $M > 0$, sans quoi α serait constante, ce qui est clairement impossible.
Il en résulte alors que la fonction $\tilde{\alpha}$ est lipschitzienne de rapport $\leq M$. En effet, soit $(x, y) \in (\mathbf{R}^{Q+1} - \{0\})^2$ quelconque. Si le segment $[x, y]$ ne contient pas 0, on a immédiatement, d'après l'inégalité des accroissements finis, $||\tilde{\alpha}(x) - \tilde{\alpha}(y)||_{\mathbf{R}^{Q+1}} \leq M||x - y||_{\mathbf{R}^{Q+1}}$. Si en revanche $[x, y]$ contient 0, on choisit $z \notin \mathrm{Vect}(x)$ de norme 1 (c'est possible, puisque $Q + 1 \geq 2$). Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $[x, x + \varepsilon z]$ et $[x + \varepsilon z, y]$ ne contiennent pas 0, donc :

$$\begin{aligned}
||\tilde{\alpha}(x) - \tilde{\alpha}(y)||_{\mathbf{R}^{Q+1}} &\leq ||\tilde{\alpha}(x) - \tilde{\alpha}(x + \varepsilon z)||_{\mathbf{R}^{Q+1}} + ||\tilde{\alpha}(x + \varepsilon z) - \tilde{\alpha}(y)||_{\mathbf{R}^{Q+1}} \\
||\tilde{\alpha}(x) - \tilde{\alpha}(y)||_{\mathbf{R}^{Q+1}} &\leq M||\varepsilon z||_{\mathbf{R}^{Q+1}} + M||(x + \varepsilon z) - y||_{\mathbf{R}^{Q+1}} \\
||\tilde{\alpha}(x) - \tilde{\alpha}(y)||_{\mathbf{R}^{Q+1}} &\leq M\varepsilon + M||x - y||_{\mathbf{R}^{Q+1}} + M\varepsilon
\end{aligned}$$

ce qui donne bien $||\tilde{\alpha}(x) - \tilde{\alpha}(y)||_{\mathbf{R}^{Q+1}} \leq M||x - y||_{\mathbf{R}^{Q+1}}$.
Soit alors $(x, y) \in (\mathbf{R}^{Q+1} - \{0\})^2$ quelconque tel que $\beta_t(x) = \beta_t(y)$. On a :

$$y = \sqrt{1+t^2}\beta_t(y) - t\tilde{\alpha}(y) = \sqrt{1+t^2}\beta_t(x) - t\tilde{\alpha}(x) + t(\tilde{\alpha}(x) - \tilde{\alpha}(y)) = x + t(\tilde{\alpha}(x) - \tilde{\alpha}(y))$$

d'où, par conséquent :

$$||x - y||_{\mathbf{R}^{Q+1}} = |t| \cdot ||\tilde{\alpha}(x) - \tilde{\alpha}(y)||_{\mathbf{R}^{Q+1}} \leq |t|M||x - y||_{\mathbf{R}^{Q+1}}$$

Il en résulte que si $|t| < t_1 = 1/M$, β_t est injective. Par ailleurs, on a pour tout x, $d(\beta_t)_x = \frac{\mathrm{id} + t \cdot d(\tilde{\alpha})_x}{\sqrt{1+t^2}}$, d'où :

$$\|\,\mathrm{id} - d(\beta_t)_x\| = \left\|\mathrm{id} - \frac{\mathrm{id} + t \cdot d(\tilde{\alpha})_x}{\sqrt{1+t^2}}\right\| \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} + M|t| \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Comme $\mathrm{GL}(\mathbf{R}^{Q+1})$ est ouvert (comme image réciproque de l'application continue det), il existe $t_2 > 0$ tel que pour $|t| < t_2$, $(\beta_t)_x$ soit inversible pour tout x. On pose alors $t_0 = \min(1, t_1, t_2)$. Pour $|t| < t_0$, β_t est injective et sa différentielle est partout inversible, donc le théorème d'inversion globale assure que c'est un C^1-difféomorphisme sur son image.
On remarque en outre que pour tout x, $\tilde{\alpha}(x)$ est un vecteur de norme $||x||_{\mathbf{R}^{Q+1}}$ orthogonal à x. Il en résulte en particulier que :

$$||\beta_t(x)||^2_{\mathbf{R}^{Q+1}} = \frac{||x||^2_{\mathbf{R}^{Q+1}} + t^2||x||^2_{\mathbf{R}^{Q+1}}}{1+t^2} = ||x||^2_{\mathbf{R}^{Q+1}}$$

donc β_t envoie chaque sphère de centre 0 dans elle-même. Si l'on pose $U = 2B_{(Q+1)} - B'_{(Q+1)} = \{x \in \mathbf{R}^{Q+1} \;/\; 1 < ||x||_{\mathbf{R}^{Q+1}} < 2\}$, il vient ainsi en particulier $\beta_t(U) \subset U$. Montrons que pour $|t| < t_0$, cette inclusion est en fait une égalité. Soit en effet $y \in U$ quelconque. Comme $|t| < 1$, on peut poser :

$$K = \left\{u \in \mathbf{R}^{Q+1} \;/\; \frac{\sqrt{1+t^2}}{1+|t|}||y||_{\mathbf{R}^{Q+1}} \leq ||u||_{\mathbf{R}^{Q+1}} \leq \frac{\sqrt{1+t^2}}{1-|t|}||y||_{\mathbf{R}^{Q+1}}\right\}$$

K est un compact non vide $\mathbf{R}^{Q+1}$, donc il est en particulier complet pour la topologie induite. On considère l'application $h : K \to \mathbf{R}^{Q+1}$, $u \mapsto \sqrt{1+t^2}y - t\tilde{\alpha}(u)$, qui est bien définie puisque K ne contient pas 0. On a pour tout $u \in K$:

$$\begin{aligned}
||h(u)||_{\mathbf{R}^{Q+1}} &\leq \sqrt{1+t^2}||y||_{\mathbf{R}^{Q+1}} + |t| \cdot ||u||_{\mathbf{R}^{Q+1}} \\
||h(u)||_{\mathbf{R}^{Q+1}} &\leq (1-|t|)\frac{\sqrt{1+t^2}}{1-|t|}||y||_{\mathbf{R}^{Q+1}} + |t|\frac{\sqrt{1+t^2}}{1-|t|}||y||_{\mathbf{R}^{Q+1}} \\
||h(u)||_{\mathbf{R}^{Q+1}} &\leq \frac{\sqrt{1+t^2}}{1-|t|}||y||_{\mathbf{R}^{Q+1}}
\end{aligned}$$

et de la même façon :

$$\begin{aligned}
||h(u)||_{\mathbf{R}^{Q+1}} &\geq \sqrt{1+t^2}||y||_{\mathbf{R}^{Q+1}} - |t| \cdot ||u||_{\mathbf{R}^{Q+1}} \\
||h(u)||_{\mathbf{R}^{Q+1}} &\geq (1+|t|)\frac{\sqrt{1+t^2}}{1+|t|}||y||_{\mathbf{R}^{Q+1}} - |t|\frac{\sqrt{1+t^2}}{1+|t|}||y||_{\mathbf{R}^{Q+1}} \\
||h(u)||_{\mathbf{R}^{Q+1}} &\geq \frac{\sqrt{1+t^2}}{1+|t|}||y||_{\mathbf{R}^{Q+1}}
\end{aligned}$$

donc h envoie K dans K. En outre, pour tout $(x, y) \in K^2$:

$$||h(x) - h(y)||_{\mathbf{R}^{Q+1}} = |t| \cdot ||\tilde{\alpha}(x) - \tilde{\alpha}(y)||_{\mathbf{R}^{Q+1}} \leq M|t| \cdot ||x - y||_{\mathbf{R}^{Q+1}}$$

Comme $M|t| < 1$, h est une application contractante de K dans K, donc elle admet un point fixe x. Il vient alors $x = \sqrt{1-t^2}y - t\tilde{\alpha}(x)$, d'où $\beta_t(x) = y$. En particulier, il vient $||x||_{\mathbf{R}^{Q+1}} = ||y||_{\mathbf{R}^{Q+1}}$, donc $x \in U$, ce qui montre bien que $\beta_t(U) = U$.
On a finalement montré que β_t induisait un difféomorphisme de U sur lui-même.

2. Soit $F = 2B'_{(Q)} - B_{(Q)}$ l'adhérence de U, qui est un compact ne contenant pas $\{0\}$. On note L la forme linéaire sur $C(F)$ qui a toute fonction associe sa valeur moyenne :

$$\forall f \in C(F), \quad L(f) = \frac{\int \cdots \int_F f}{\int \cdots \int_F 1}$$

On note alors, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f_t : F \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \det(d(\beta_t)_x)$, le déterminant jacobien de β_t. Comme β_t est C^1, f_t est continue pour tout t, et pour $|t| < t_0$, on a vu que f_t ne s'annulait pas sur U. En outre, pour tout $x \in U$, $t \mapsto f_t(x)$ est continue par définition de β_t, et comme $f_0(x) = 1$, on en déduit que $f_t(x) > 0$ pour $|t| < t_0$. Pour $|t| < t_0$, la restriction à U de f_t est donc la valeur absolue du déterminant d'un difféomorphisme de U sur lui-même, ce qui montre, d'après le théorème de changement de variable en dimension $Q + 1$, que $L(f_t) = L(1) = 1$. On a donc, pour $|t| < t_0$:

$$1 = L\left(\det\left(\frac{\mathrm{id} + t \cdot d\tilde{\alpha}}{\sqrt{1+t^2}}\right)\right) = (1+t^2)^{-(Q+1)/2} L(\det(\mathrm{id} + t \cdot d\tilde{\alpha}))$$

La fonction $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $t \mapsto L(\det(\mathrm{id} + t \cdot d\tilde{\alpha}))$ coïncide donc avec $R : t \mapsto (1 + t^2)^{(Q+1)/2}$ dans un voisinage de 0. Or, P est clairement une fonction polynôme, donc il doit en être de même pour R. On a, au voisinage de 0 :

$$R(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{q(q-1)\cdots(q-n+1)}{n!} t^{2n} \quad \text{avec } q = \frac{Q+1}{2}$$

Comme les dérivées de R en 0 sont nulles à partir d'un certain rang, on doit donc finalement avoir q entier, donc Q impair.
Par conséquent, si Q est pair, il n'existe pas de fonction $\alpha \in C(S_{(Q)}, S_{(Q)})$ vérifiant $\alpha(x) \cdot x = 0$ pour tout x et telle que la fonction $\tilde{\alpha}$ associée soit C^1. On a donc obtenu une version

différentiable du théorème de la boule chevelue. On peut en déduire la version continue par un argument de densité : si $\alpha_0 \in C(S_{(Q)}, S_{(Q)})$ vérifie $\alpha_0(x) \cdot x = 0$ pour tout x, on lui associe $\tilde{\alpha}_0$ comme précédemment, et cette dernière fonction peut être approchée par une fonction C^1 aussi près que l'on veut pour la norme $|| \cdot ||_\infty$ sur le compact F. On note alors $\tilde{\alpha}_1 : F \to \mathbf{R}^{Q+1}$ une fonction C^1 telle que $||\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_1||_\infty \leq 1/3$, et elle vérifie alors pour tout $x \in S_{(Q)}$, $||\tilde{\alpha}_1(x)||_{\mathbf{R}^{Q+1}} \geq 2/3$, et $\tilde{\alpha}_1(x) \cdot x = (\tilde{\alpha}_1(x) - \tilde{\alpha}_0(x)) \cdot x \leq 1/3$. On peut donc définir une fonction $\alpha : S_{(Q)} \to S_{(Q)}$ par :

$$\alpha(x) = \frac{\tilde{\alpha}_1(x) - (\tilde{\alpha}_1(x) \cdot x)x}{||\tilde{\alpha}_1(x) - (\tilde{\alpha}_1(x) \cdot x)x||_{\mathbf{R}^{Q+1}}}$$

On a $\alpha(x) \cdot x = 0$ pour tout $x \in S_{(Q)}$, et la fonction $\tilde{\alpha}$ associée est bien de classe C^1. Cela conclut la preuve du théorème de la boule chevelue.