Ulm Lyon 1993 (6 H)

Définitions

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Q}$ le corps des nombres rationnels, $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels. On pose également $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}, \quad x \geq 0\}$ et $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ - \{0\}$.

Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$, U une partie de $\mathbb{R}^m$ et V une partie de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{C}(U, V)$ l'ensemble des applications continues de U dans V. On pose de plus $\mathcal{C}(U) = \mathcal{C}(U, \mathbb{R})$. Lorsque $f \in \mathcal{C}([0,1])$, on note $||f||_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$, et $B'_\infty = \{f \in \mathcal{C}([0,1]), \quad ||f||_\infty \leq 1\}$. On rappelle que $|| \, ||_\infty$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1])$.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On rappelle qu'une fonction f de A dans $\mathbb{R}$ est dite lipschitzienne s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout x et y dans A,

$$|f(x) - f(y)| \leq k \, |x - y|.$$

On note $\mathcal{L}ip(A)$ l'ensemble des applications lipschitziennes de A dans $\mathbb{R}$.

Lorsque $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{C}^p([0,1])$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^p$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{C}_0^p([0,1])$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}^p([0,1])$ formé des applications f telles que $f(0) = f(1) = 0$. Lorsque $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$, on note

$$||f||_{\mathcal{C}^1} = ||f||_\infty + ||f'||_\infty.$$

On admettra que $|| \, ||_{\mathcal{C}^1}$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}^1([0,1])$.

Soit W un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'une norme $|| \, ||_W$, $w_0 \in W$, et $R \in \mathbb{R}_+^*$. On note $B'_{W, || \, ||_W}(w_0, R)$ la boule fermée de W de centre w_0 et de rayon R pour la norme $|| \, ||_W$.

On rappelle qu'une partie K de W est dite convexe si pour tout $w_1, w_2 \in K$ et $\theta \in [0,1]$, on a $\theta \, w_1 + (1 - \theta) \, w_2 \in K$. On rappelle également qu'une partie K de W est dite compacte si de toute suite d'éléments de K, on peut extraire une sous-suite convergeant vers un élément de K (pour la norme $|| \, ||_W$). Enfin, une partie K de W est dite symétrique si pour tout $w \in K$, on a également $-w \in K$.

Soit Z une partie de $\mathbb{R}$, Y une partie de Z, et f une application de Y dans $\mathbb{R}$. On appelle prolongement de f sur Z une application $\tilde{f}$ de Z dans $\mathbb{R}$ dont la restriction à Y est f.

Enfin, lorque $m \in \mathbb{N}^*$, on note $B_{(m)} = \{(x_1, .., x_m) \in \mathbb{R}^m, \quad |x_1|^2 + .. + |x_m|^2 < 1\}$, $B'_{(m)} = \{(x_1, .., x_m) \in \mathbb{R}^m, \quad |x_1|^2 + .. + |x_m|^2 \leq 1\}$, et $S_{(m-1)} = \{(x_1, .., x_m) \in \mathbb{R}^m, \quad |x_1|^2 + .. + |x_m|^2 = 1\}$.

La partie I du problème est consacrée à la démonstration de l'existence de solutions pour un certain type d'équations différentielles. On utilise à la question I.9 la version suivante du théorème de Schauder.

Théorème de Schauder: Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, C une partie de E non vide, symétrique, convexe, fermée et bornée. Soit T une application continue de C dans C telle que $T(C)$ est une partie de E dont l'adhérence est compacte. Alors il existe $e \in C$, tel que $T(e) = e$.

La partie II du problème est consacrée à la démonstration du théorème de Schauder. On utilise à la question II.2.c le théorème de Brouwer.

Théorème de Brouwer: Soit $P \in \mathbb{N}^*$ et φ une application continue de $B'_{(P)}$ dans $B'_{(P)}$. Alors il existe $x \in B'_{(P)}$ tel que $\varphi(x) = x$.

La partie III du problème est consacrée à la démonstration du théorème de Brouwer. On utilise à la question III.2 le théorème suivant, dit "de la boule chevelue".

Théorème de la boule chevelue: Lorsque $Q \in \mathbb{N}^*$ est pair, il n'existe pas d'application continue α de $S_{(Q)}$ dans $S_{(Q)}$ telle que pour tout $x \in S_{(Q)}$, $\alpha(x) \cdot x = 0$.

La partie IV du problème est consacrée à la démonstration du théorème de la boule chevelue.

I

1. a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Quel est l'ensemble Q_λ des solutions u appartenant à $C^2([0,1])$ de l'équation

$$\forall x \in]0,1[, \qquad -u''(x) + \lambda\, u(x) = 0 \ ? \tag{1}$$

b) Déterminer le sous-ensemble Λ de $\mathbb{R}$ formé des λ tels que pour tout $g \in C([0,1])$, l'équation

$$\forall x \in]0,1[, \qquad -u''(x) + \lambda\, u(x) = g(x) \tag{2}$$

admet une unique solution u appartenant à $C_0^2([0,1])$.

On observera en particulier que $\mathbb{R}_+^* \subset \Lambda$.

Lorsque $\lambda \in \Lambda$, on note Ψ_λ l'application de $C([0,1])$ dans $C_0^2([0,1])$ qui à g associe l'unique solution u de (2) appartenant à $C_0^2([0,1])$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Donner une majoration de $\sup_{g \in B'_\infty} ||\Psi_\lambda(g)||_\infty$ en fonction de λ (c'est-à-dire trouver une fonction r de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $g \in C([0,1])$ vérifiant $||g||_\infty \leq 1$, on ait $||\Psi_\lambda(g)||_\infty \leq r(\lambda)$).

On pourra considérer par exemple un point $\bar{x}$ de $[0,1]$ où $\Psi_\lambda(g)$ atteint son maximum.

b) Donner en fonction de λ des majorations de $\sup_{g\in B'_\infty} \|(\Psi_\lambda(g))'\|_\infty$ et de $\sup_{g\in B'_\infty} \|(\Psi_\lambda(g))''\|_\infty$.

Lorsque $\mu \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $C_\mu = \{u \in \mathcal{C}_0^1([0,1]), \quad \|u\|_{C^1} \leq \mu\}$. Lorsque $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, on note Φ_h l'application de $\mathcal{C}^1([0,1])$ dans $\mathcal{C}([0,1])$ définie par la formule

$$\forall u \in \mathcal{C}^1([0,1]), \forall x \in [0,1], \qquad (\Phi_h(u))(x) = h(u'(x)).$$

3. a) Soit $\mu \in \mathbb{R}_+^*$. L'ensemble C_μ est-il une partie non vide, symétrique et convexe de $\mathcal{C}^1([0,1])$? L'ensemble C_μ est-il fermé et borné dans $\mathcal{C}^1([0,1])$ (pour la norme $\|\ \|_{C^1}$)?

b) Soit h une fonction continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Trouver en fonction de λ et h un élément μ de $\mathbb{R}_+^*$ de telle manière que

$$(\Psi_\lambda \text{ o } \Phi_h)(C_\mu) \subset C_\mu.$$

4. a) Soit h une application lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que Ψ_λ o Φ_h est continue de $\mathcal{C}^1([0,1])$ muni de la norme $\|\ \|_{C^1}$ dans lui-même. On pourra utiliser la question I.2.

b) L'application Ψ_λ o Φ_h est-elle encore nécessairement continue (de $\mathcal{C}^1([0,1])$ muni de la norme $\|\ \|_{C^1}$ dans lui-même) si l'on suppose seulement que $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$?

5. Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}([0,1])$ telle que la suite $(\|q_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (dans $\mathbb{R}$). Montrer qu'il existe une application strictement croissante σ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, la suite réelle $(q_{\sigma(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

6. a) Peut on trouver un prolongement dans $\mathcal{C}([0,1])$ à tout élément de $\mathcal{C}([0,1] \cap \mathbb{Q})$?

b) Peut-on trouver un prolongement dans $\mathcal{L}ip([0,1])$ à tout élément de $\mathcal{L}ip([0,1] \cap \mathbb{Q})$?

7. Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de B'_∞. Peut-on nécessairement en extraire une sous-suite qui converge dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme $\|\ \|_\infty$?

8. a) Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}^1([0,1])$ telle que $(\|s_n\|_{C^1})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (dans $\mathbb{R}$). Peut-on nécessairement extraire de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme $\|\ \|_\infty$?

b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}^2([0,1])$ telle que $(\|u_n\|_\infty + \|u_n'\|_\infty + \|u_n''\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (dans $\mathbb{R}$). Peut-on nécessairement extraire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous–suite qui converge dans $C^1([0,1])$ pour la norme $\| \|_{C^1}$?

9. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, et h une application continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On admet dans cette question le théorème de Schauder. Montrer qu'il existe une solution u dans $C_0^2([0,1])$ de l'équation

$$\forall x \in]0,1[, \qquad -u''(x) + \lambda\, u(x) = h(u'(x)). \tag{3}$$

II

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, F un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension N, et $\mathcal{H}$ un sous-ensemble de F supposé symétrique, convexe, fermé, borné, et contenant au moins deux éléments.

a) Montrer que le sous–espace vectoriel G de F engendré par les éléments de $\mathcal{H}$ est de dimension au moins 1 et admet une base formée d'éléments de $\mathcal{H}$. Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous–ensemble de G symétrique, convexe, fermé, borné, tel que 0 appartient à l'intérieur de $\mathcal{H}$ ($\mathcal{H}$ étant considéré comme partie de G).

b) On définit une application ρ de G dans $\mathbb{R}_+$ par la formule

$$\forall a \in G, \qquad \rho(a) = \inf\left\{\eta \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{\eta}\, a \in \mathcal{H}\right\}.$$

Montrer que ρ est bien définie, et est une norme sur G. Quel lien y a–t–il entre $B'_{G,\rho}(0,1)$ et $\mathcal{H}$?

c) Montrer qu'il existe $P \in \{1,2,3,..,N\}$ et une bijection continue de $\mathcal{H}$ dans $B'_{(P)}$ dont la réciproque est également continue.

2. Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, $\| \|_E$ sa norme, et C une partie non vide, symétrique, convexe, fermée et bornée de E. Soit T une application continue de C dans C telle que l'adhérence de $T(C)$ est une partie compacte de E.

a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, et $c_1^\varepsilon, .., c_{N_\varepsilon}^\varepsilon \in C$ tels que $T(C) \subset \cup_{i=1}^{N_\varepsilon} B'_{E,\| \|_E}(c_i^\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2})$.

b) On définit pour $i \in \{1,2,3,..,N_\varepsilon\}$ l'application $\pi_{i,\varepsilon}$ de C dans $\mathbb{R}$ par

$$\pi_{i,\varepsilon}(e) = \max\Big(0, \varepsilon - \|T(e) - c_i^\varepsilon\|_E\Big).$$

La formule

$$T_\varepsilon(e) = \left(\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \pi_{i,\varepsilon}(e)\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \pi_{i,\varepsilon}(e)\, c_i^\varepsilon\right)$$

définit–elle une application continue de C dans E (pour $\| \|_E$)?

Donner une majoration explicite de $\sup_{e\in C} ||T_\varepsilon(e) - T(e)||_E$ en fonction de ε.

c) On admet à cette question le théorème de Brouwer. On pose $\mathcal{H}_\varepsilon = C \cap (\mathbb{R}e_1^\varepsilon + .. + \mathbb{R}e_{N_\varepsilon}^\varepsilon)$. Montrer que $T_\varepsilon(\mathcal{H}_\varepsilon) \subset \mathcal{H}_\varepsilon$. Montrer qu'il existe e_ε dans $\mathcal{H}_\varepsilon$ tel que $T_\varepsilon(e_\varepsilon) = e_\varepsilon$.

Montrer le théorème de Schauder.

III

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on dénote par $|| \, ||_{\mathbb{R}^m}$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^m$ et par $\cdot$ le produit scalaire euclidien. Si $x = (x_1, .., x_m)$, $y = (y_1, .., y_m)$, on a $x \cdot y = x_1 y_1 + .. + x_m y_m$.

On note également (conformément aux notations de l'introduction) $B_{(m)}$ (respectivement $B'_{(m)}$) la boule unité ouverte (respectivement fermée) pour la norme $|| \, ||_{\mathbb{R}^m}$, et $2\,B_{(m)} = \{x \in \mathbb{R}^m, \quad ||x||_{\mathbb{R}^m} < 2\}$, $2\,B'_{(m)} = \{x \in \mathbb{R}^m, \quad ||x||_{\mathbb{R}^m} \leq 2\}$.

Enfin, on définit $S_{(m-1)} = \{x \in \mathbb{R}^m, \quad ||x||_{\mathbb{R}^m} = 1\}$, $S^-_{(m-1)} = \{x = (x_1, .., x_m) \in S_{(m-1)}, \quad x_m \leq 0\}$ et $D_{(m-2)} = \{x = (x_1, .., x_m) \in S_{(m-1)}, \quad x_m = 0\}$.

On prendra garde au fait que $S_{(m)}$ est une partie de $\mathbb{R}^{m+1}$ et que $D_{(m)}$ est une partie de $\mathbb{R}^{m+2}$.

1. Dans cette question, $P \in \mathbb{N}^*$, et φ désigne une fonction de $\mathcal{C}(B'_{(P)}, B'_{(P)})$ telle que

$$\forall x \in B'_{(P)}, \qquad \varphi(x) \neq x.$$

a) En utilisant φ, construire $\xi_1 \in \mathcal{C}(B'_{(P)}, \mathbb{R}^P - \{0\})$ tel que pour tout $x \in S_{(P-1)}$, $\xi_1(x) \cdot x > 0$.

b) En utilisant ξ_1, construire $\xi_2 \in \mathcal{C}(B'_{(P+1)}, \mathbb{R}^{P+1} - \{0\})$ tel que pour tout $x \in S_{(P)}$, $\xi_2(x) \cdot x > 0$.

c) Soit $Q \in \{P, P+1\}$. Construire $\xi_3 \in \mathcal{C}(B'_{(Q)}, \mathbb{R}^Q - \{0\})$ tel que pour tout $x \in S_{(Q-1)}$, $\xi_3(x) = x$.

d) Soit $Q \in \{P, P+1\}$. Construire $\xi_4 \in \mathcal{C}(S^-_{(Q)}, \mathbb{R}^{Q+1} - \{0\})$ tel que pour tout $x \in S^-_{(Q)}$, $\xi_4(x) \cdot x = 0$, et pour tout $x \in D_{(Q-1)}$, $\xi_4(x) = (0, 0, .., 0, 1)$.

2. On admet dans cette question le théorème de la boule chevelue. Montrer le théorème de Brouwer.

IV

On reprend dans cette partie certaines des notations introduites au début de la partie III.

De plus, dans cette partie, $Q \in \mathbb{N}^*$, et α désigne une application de $\mathcal{C}(S_{(Q)}, S_{(Q)})$ telle que pour tout $x \in S_{(Q)}$, $\alpha(x) \cdot x = 0$, et telle que l'application

$$\tilde{\alpha} : x \in \mathbb{R}^{Q+1} - \{0\} \mapsto \alpha\left(\frac{x}{\|x\|_{\mathbb{R}^{Q+1}}}\right) \|x\|_{\mathbb{R}^{Q+1}}$$

soit de classe C^1 de $\mathbb{R}^{Q+1} - \{0\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{Q+1}$.

Lorsque $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^{Q+1} - \{0\}$, on note

$$\beta_t(x) = \frac{x + t\,\tilde{\alpha}(x)}{\sqrt{1+t^2}}\,.$$

1. Montrer qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que lorsque $|t| < t_0$, l'application β_t est un C^1–difféomorphisme de $2\,B_{(Q+1)} - B'_{(Q+1)}$ dans lui–même. Pour montrer la surjectivité de β_t, on pourra par exemple utiliser une suite récurrente.

2. Montrer le théorème de la boule chevelue. On pourra admettre le théorème de changement de variable suivant: il existe une forme linéaire L sur $\mathcal{C}(2\,B'_{(Q+1)} - B_{(Q+1)})$ (dénommée "valeur moyenne sur $2\,B'_{(Q+1)} - B_{(Q+1)}$") telle que $L(|\mathcal{J}|) = 1$ lorsque $\mathcal{J}$ est un élément de $\mathcal{C}(2\,B'_{(Q+1)} - B_{(Q+1)})$ dont la restriction à $2\,B_{(Q+1)} - B'_{(Q+1)}$ est le déterminant jacobien d'un C^1–difféomorphisme de $2\,B_{(Q+1)} - B'_{(Q+1)}$ dans lui–même.